EN

MEGET ALMINDELIG

INTEGRATIONS - FORMEL.

MED ANDRE DERTIL HÖRENDE

BETRAGTNINGER.

Af

Carl Ferdinand Degen.

Dr. Philos. og Overlærer i Mathematik og Physik ved Cathedral-Skolen i Odense.

En meget almindelig Integrations-Formel for endelige Differentser af Formen $y\Delta x$. *Ved* C. F. DEGEN.

Den store Geometer Hr. Lagrange, hvis Skarpsindighed Europa's Lærde saa ofte have havt Lejlighed at beundre, har i sin italienske Epistel til Fagan (1754) angivet en Differentialformel, af hvilken han med beundringsværdig Lethed har afledet den bekjendte Integralformel, som findes i Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. pag. 125. No. XXI., som et specielt Tilfælde. Forfatteren fandt 1802 i Martio en almindeligere Formel, nemlig

$$\Sigma(y\Delta x) = xy - \frac{x.\,x'}{1.2}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{x.x'.x''}{1.2.3}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - \ldots$$

hvori den endelige Differents Δx antages at være en bestandig Störrelse, $x' = x + \Delta x$, $x'' = x + 2\Delta x$, $x^{(n)} = x + {}^{n}\Delta x$.

Saameget end denne Formels Opfindelse glædede ham, var dog Haabet, om *at fremstille en endnu fuldkomnere Formel* langt behageligere, og dette Haab opfyldtes uforventet, da Forfatteren fulgte en saa skarpsindig, en saa kyndig Forgjængers Fodspor.

Den af Hr. Lagrange (l.c.) givne Formel:

$$d^m(xy) = x^m y^0 + m x^{m-1} y' + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}.\ x^{m-1} y' + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}.\ x^{m-2} y^2 + \ldots$$

er egentlig den af Euler, i hans fortræffelige Inst. Calc. Diff. P. 1. Cap. 8. §. 249 givne Formel, iført det Newtonianske Binomiums Skikkelse; men den Anvendelse, som disse tvende store Analysens Mestere gjöre af samme, er forskjellig. Her betyde nemlig x^m og y^m det samme som $d^m x$ og $d^m y$. Men

Negativ Differentation af enhver Grad er Integration af samme Grad. $d^{-m}(ydx) = \int^m (ydx) = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int^{m-3} (ydx)$, og saaledes i andre Tilfælde. Dette beviser Hr. Lagrange for de sædvanlige forsvindende Differentialier. At kunne give saa stor en Mands Arbejde en liden Tilsætning er en Ære for Forfatteren.

Differentierer man xy saaledes at de endelige Differentser ansees som foranderlige Störrelser, da erholdes for $\Delta^m(xy)$ et af fölgende tvende Udtryk:

$$\text{A)}\quad \Delta^m(xy) = y\,\Delta^m x$$
$$+[\Delta^{m-1}x+\Delta^m x].\ {}^m\mathfrak{A}\Delta y$$
$$+[\Delta^{m-2}x+2\Delta^{m-1}x+\Delta^m x].\ {}^m\mathfrak{B}\Delta^2 y$$
$$+[\Delta^{m-3}x+3\Delta^{m-2}x+3\Delta^{m-1}x+\Delta^m x].\ {}^m\mathfrak{C}\Delta^3 y$$

$$+ \qquad + \qquad + \qquad +$$

$$\text{B)}\quad \Delta^m(xy) = x\Delta^m y$$
$$+[\Delta^{m-1}y+\Delta^m y].\ {}^m\mathfrak{A}\Delta x$$
$$+[\Delta^{m-2}y+2\Delta^{m-1}y+\Delta^m y].\ {}^m\mathfrak{B}\Delta^2 x$$
$$+[\Delta^{m-3}y+3\Delta^{m-2}y+3\Delta^{m-1}y+\Delta^m y].\ {}^m\mathfrak{C}\Delta x$$

$$+ \qquad + \qquad + \qquad +$$

$$\text{c)}\quad \Delta^m(xy) = [y \maltese {}^m\mathfrak{A}\Delta y \maltese {}^m\mathfrak{B}\Delta^2 y \maltese {}^m\mathfrak{C}\Delta^3 y \maltese {}^m\mathfrak{D}\Delta^4 y \maltese \ldots].\ \Delta^m x$$
$$\maltese [1.{}^m\mathfrak{A}\Delta y \maltese 2.{}^m\mathfrak{B}\Delta^2 y \maltese 3.{}^m\mathfrak{C}\Delta^3 y \maltese 4.{}^m\mathfrak{D}\Delta^4 y \maltese \ldots].\ \Delta^{m-1}x$$
$$\maltese [1.{}^m\mathfrak{B}\Delta^2 y \maltese 3.{}^m\mathfrak{C}\Delta^3 y \maltese 6.{}^m\mathfrak{D}\Delta^4 y \maltese \ldots].\ \Delta^{m-2}x$$
$$\maltese [1.{}^m\mathfrak{C}\Delta^3 y \maltese 4.{}^m\mathfrak{D}\Delta^4 y \maltese \ldots].\ \Delta^{m-3}x$$
$$\maltese [1.{}^m\mathfrak{D}\Delta^4 y \maltese \ldots].\ \Delta^{m-4}x$$

$$\maltese \qquad \maltese \qquad \maltese \qquad \maltese$$

Da nu $\Delta^{-n}(z) = \Sigma^n(z)$, og ${}^{-n}\mathfrak{A} = -\ {}^n\mathfrak{A}$, ${}^{-n}\mathfrak{B} = \maltese\ {}^{n\maltese 1}\mathfrak{B}$, ${}^{-n}\mathfrak{C} = -\ {}^{n\maltese 2}\mathfrak{C}$, ${}^{-n}\mathfrak{D} = \maltese\ {}^{n\maltese 3}\mathfrak{D}$, o. s. fr. saa forvandles Ligningen C til fölgende:

D) $\Sigma^n(y\Delta x) = [y - {}^n\mathfrak{A}\Delta y + {}^{n+1}\mathfrak{B}\Delta^2 y - {}^{n+2}\mathfrak{C}\Delta^3 y + {}^{n+3}\mathfrak{D}\Delta^4 y - \ldots].\,\Sigma^{n-1}(x)$

$- [{}^n\mathfrak{A}\Delta y - 2.{}^{n+1}\mathfrak{B}\Delta^2 y + 3.{}^{n+2}\mathfrak{C}\Delta^3 y - 4.{}^{n+3}\mathfrak{D}\Delta^4 y + \ldots].\,\Sigma^n(x)$

$+ [{}^{n+1}\mathfrak{B}\Delta^2 y - 3.{}^{n+2}\mathfrak{C}\Delta^3 y + 6.{}^{n+3}\mathfrak{D}\Delta^4 y - \ldots].\,\Sigma^{n+1}(x)$

$- [{}^{n+2}\mathfrak{C}\Delta^3 y - 4.{}^{n+3}\mathfrak{D}\Delta^4 y + \ldots].\,\Sigma^{n+2}(x)$

✠ ✠ ✠

fordi nemlig Δx sættes istædet for x, altsaa $\Delta^{m+1}x$ istædet for $\Delta^m x$. Men $m = -n$, altsaa forvandles $\Delta^m x$ til $\Delta^{-n+1}x = \Delta^{-(n-1)}x = \Sigma^{n-1}(x)$, $\Delta^{m-1}x$ til $\Delta^m x = \Delta^{-n}x = \Sigma^n(x)$, o. s. fremdeles.

Man sætte endvidere:

$\Sigma^{n-1}(x) = N$

$\Sigma^{n-1}(x) + \Sigma^n(x) = N' = N + \Sigma(N)$

$\Sigma^{(n-1)}x + 2\Sigma^n(x) + \Sigma^{n+1}(x) = N'' = N' + \Sigma(N')$,

o. s. fr.

saa erholdes følgende Formel:

E) $\Sigma^n(y\Delta x) = Ny - N'\,{}^n\mathfrak{A}\Delta y + N''\,{}^{n+1}\mathfrak{B}\Delta^2 y - N'''\,{}^{n+2}\mathfrak{C}\Delta^3 y + \ldots$

For at bestemme Værdierne N, N′, N″, N‴, etc.: maa man lægge Mærke til, at naar

$$z = \frac{(x+p\Delta x)(x+\overline{p-1}.\Delta x)(x+\overline{p-2}.\Delta x)\ldots(x+\overline{p-q}.\Delta x)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\ldots.\;(q+1)}$$

og z′ erholdes af z ved at sætte $x+\Delta x$ istædet for x, da bliver:

$$z' = \frac{(x+\overline{p+1}\cdot\Delta x)(x+p\Delta x)\ldots\ldots(x+\overline{p-q+1}\cdot\Delta x)}{1\cdot 2\cdot\ldots\ldots\cdot(q+1)} = \frac{x+\overline{p+1}\,\Delta x}{x+\overline{p-q}\cdot\Delta x}\cdot z$$

altsaa $\Delta z = z' - z = \frac{(q+1)\Delta x}{x+\overline{p-q}\cdot\Delta x}\cdot z$, og omvendt $z = \Sigma'(\Delta z) =$

$$\frac{x+\overline{p-q}\cdot\Delta x}{(q+1)\Delta x}\cdot\Delta z$$

Naar altsaa

$$\Delta z = \frac{(x+p\Delta x)(x+\overline{p-1}.\Delta x)\ldots(x+\overline{p-q+1}.\Delta x)}{1\cdot 2\cdot\ldots\ldots\cdot q},$$ bliver

$$z = \frac{(x+p\Delta x)(x+\overline{p-1}.\Delta x)\ldots\ldots(x+\overline{p-q+1}.\Delta x)(x+\overline{p-q}.\Delta x)}{1\cdot 2\cdot\ldots\ldots\cdot q\cdot(q+1)\Delta x}.$$

Nu er $\Sigma.\Delta x = x$, og $\Sigma(x) = \frac{x.(x-\Delta x)}{1.\ 2\Delta x}$, hvoraf sluttes

$$\Sigma^{0}(x) = \frac{x}{1} = X^{0}$$

$$\Sigma^{1}(x) = \frac{x(x-\Delta x)}{1.\ 2\Delta x} = X'$$

$$\Sigma^{2}(x) = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)}{1.\ 2\ .\ 3\Delta x^{2}} = X''$$

$$\Sigma^{3}(x) = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)(x-3\Delta x)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ 4\Delta x^{3}} = X'''$$

. . . .

$$\Sigma^{p}(x) = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots(x-p\Delta x)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ (p+1)\Delta x^{p}} = X^{(p)}$$

Altsaa $\Sigma^{p-1}(x) = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots(x-\overline{p-1}.\Delta x)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ p\Delta x^{p-1}} = X^{(p-1)}$

fölgelig $\Sigma^{p-1}(x) + \Sigma^{p}(x) = \left(1 + \frac{x-p\Delta x}{(p+1)\Delta x}\right).\ \Sigma^{p-1}(x) =$

$$\frac{(x+\Delta x)}{(p+1)\Delta x}\cdot\Sigma^{p-1}(x)$$

Af disse Udtryk sluttes fremdeles

$$N = \Sigma^{n-1}(x) = \frac{x(x-\Delta x)\ldots\ldots(x-\overline{n-1}.\Delta x)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ n\Delta x^{n-1}}$$

$$N' = \frac{x+\triangle x}{(n+1)\triangle x} \cdot N = \frac{(x+\triangle x)x(x-\triangle x)\ldots\ldots(x-\overline{n-1}.\triangle x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n+1)\triangle x^n}$$

$$\Sigma.N' = N'.\frac{x-n\triangle x}{(n+2)\triangle x}, \text{ altsaa}$$

$$N'' = \left(1 + \frac{x-n.\triangle x}{(n+2)\triangle x}\right).N' = \frac{x+2\triangle x}{(n+2)\triangle x}N', \text{ eller}$$

$$N'' = \frac{(x+2\triangle x)(x+\triangle x)(x)(x-\triangle x)\ldots\ldots(x-\overline{n-1}.\triangle x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,(n+2)\triangle x^{n+1}}$$

$$\Sigma.N'' = \frac{x-n\triangle x}{(n+3)\triangle x}.N'', \text{ altsaa}$$

$$N''' = \frac{(x+3\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\ldots(x-\overline{n-1}.\triangle x)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n+3)\triangle x^{n+2}}$$

I Almindelighed er altsaa

$$N^{\circ} = \frac{x.'x.''x\ldots{}^{(n-1)}x}{1.\,2\,\,3\,.\,.\,.\,n}.\frac{1}{\triangle x^{n-1}} = \frac{{}^{(n-1)}x.{}^{(n-2)}x.{}^{(n-3)}x\ldots{}''x.\,{}'x.\,x}{1.\,\,2.\,\,3.\,.(n-2)(n-1).n}.\frac{1}{\triangle x^{n-1}}$$

$$N' = \frac{x'.{}^{\circ}x.'x\ldots{}^{(n-1)}x}{1.\,2.\,3\,.\,.(n+1)}.\frac{1}{\triangle x^{n}} = \frac{{}^{(n-1)}x.{}^{(n-2)}x.{}^{(n-3)}x\ldots\ldots{}'x.\,x\,.x'}{1.\,\,2.\,\,3.\,.(n-1)\,n\,(n+1)}.\frac{1}{\triangle x^{n}}.$$

. . . .

$N^{(p)}$ findes altsaa, naar......$\overline{n+p}$ Led af en voxende arithmetisk Række hvis förste Led er $x-\overline{n-1}.\triangle x$, og hvis Differents er $\triangle x$, multipliceres med hinanden og Productet divideres med Productet $1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ (n+p)\ .\ \triangle x^{n+p-1}$. Har man saaledes bestemt Værdien af Udtrykkene N°, N', N'', N''', . . . $N^{(p)}$, ... etc. erholder man:

$$\Sigma^n(y\triangle x) = 1.N^{\circ}y - {}^{n}\mathfrak{A}\,N'\triangle y + {}^{n+1}\mathfrak{B}\,N''\triangle^2 y - {}^{n+2}\mathfrak{C}\,N'''\triangle^3 y + \ldots\ldots \pm {}^{n+p-1}\mathfrak{P}\,N^{(p)}\triangle^p y,$$

som er den Formel, jeg har foresat mig at udvikle.

Ogsaa den har de meget almindelige Sætningers Skjæbne. Dens Anvendelse kræver Forsigtighed. Man kjender den Vildfarelse, hvortil den ellers saa ypperlige Taylorske Sætning leder i det Tilfælde, naar man af $\phi x = \sqrt[3]{\text{Sin. } x}$ vilde ved sammes Hjelp bestemme Udtrykket for $\phi(x+a) = \sqrt[3]{\text{Sin. }(x+a)}$.

Man veed ogsaa hvad den dybttænkende Laplace har viist i det K. Par. Acad. Act. 1772. [Sur les solut. part. des éqq. diff. etc.] i Henseende til den af Euler fremsatte Betingelses-Ligning:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)-Q\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

(S. Eulers Calc. Diff. P. 1. Cap. 9. §. 324). Saadanne Erfaringer bör med Rette gjöre Analysten vaersom. Det vil derfor neppe være det K. V. S. ubehageligt, om jeg her viser tvende Afveje hvorpaa yngere Analyster kunde forvilde sig.

Antager man $\triangle x = dx$ altsaa forsvindende, bliver

$$N^{\circ}=\frac{x^n}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,n dx^{n-1}},\ \text{o. s. fr.}$$

Tages end videre dx som bestandig, altsaa $d^2x = d^3x = d^4x$ etc. $= 0$, saa findes $\int^n (d^{n-1}ydx) = \frac{x^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} -$

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.\,2.\,\ldots\,\overline{n+1}}\cdot\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{n.\overline{n+1}}{1.\,2.}\cdot\frac{x^{n+2}}{1.\,2.\,.\,\overline{n+2}}\cdot\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.\,2.\,3}\cdot$$

$$\frac{x^{n+3}}{1.\,2.\,.\,\overline{n+3}}\,\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+\ldots.$$

$$\text{eller}\int ydx=\frac{x^nd^{n-1}y}{1.\,2.\ldots n.\,dx^{n-1}}-\frac{nx^{n+1}d^ny}{1.\,2.\,.\,\overline{n+1}.\,dx^n}+$$

$$\frac{\frac{n.\overline{n+1}}{1.\,2}\,x^{n+2}d^{n+1}y}{1.\,2.\,3.\ldots\overline{n+2}.\,dx^{n+1}}-\text{etc.}$$

en Ligning som erholdes, naar man sætter $d^{n-1}y$ istedet for y, og hvis Rigtighed let kan pröves. Sæt f. Ex. $y=x^3$ og $n=1$, 2, 3, 4 saa er $\frac{d^{\circ}y}{d^nx^{\circ}}=\frac{y}{1}=x^3$, $\frac{dy}{dx}=3x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$, $\frac{d^3y}{dx^3}=6$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. $=0$. Heraf erholdes

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 = \left\{\begin{array}{r} \frac{x}{1}.x^3 - \frac{x^2}{1.2}.3x^2 + \frac{x^3}{1.2.3}.6x - \frac{x^4}{1.2.3.4}.6 \\ \frac{x^2}{1.2}.3x^2 - \frac{2x^3}{1.2.3}.6x + \frac{3x^4}{1.2.3.4}.6 \\ \frac{x^3}{1.2.3}.6x - \frac{3x^4}{1.2.3.4}.6 \\ + \frac{x^4}{1.2.3.4}.6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{----} \\ \text{----} \\ \text{for } n = \\ \text{----} \\ \text{----} \end{array} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right.$$

Vilde man nu slutte: ligesom $\int^n (d^{n-1}y\,dx) = \int\left(\int^{n-1}(dy^{n-1}dx)\right) = \int y\,dx$ saaledes er ogsaa $\Sigma^n(\Delta^{n-1}y\Delta x) = \Sigma\left(\Sigma^{n-1}(\Delta^{n-1}y\Delta x)\right) = \Sigma\,(y\Delta x)$ skulde man begaae en Fejl, hvis Störrelse var des större, jo större man antog n eller Integrationsgraden; thi $\Sigma^{n-1}(\Delta^{n-1}y\Delta x)$ bliver ikke $= y\Delta x$. For at overbevise sig om denne Paastands Rigtighed, behöver man blot at sætte $n - 1 = m$, og $\Delta^m y$ istædet for y, saa erholdes $\Sigma^m(\Delta^m y\Delta x)$, ifölge den almindelige Formel, $= M^\circ\Delta^m y - \mathfrak{A}M'\Delta^{m+1}y + {}^{1+m}\mathfrak{B}M''\Delta^{m+2}y$ — etc. Men M°, M', M'', . . . ere Functioner af x og Δx; altsaa er nærværende Udtryk ikke altid og nödvendigt $= y\Delta x$, fölgelig heller ikke uden tilfældigviis, $\Sigma^n\Delta^{n-1}y\Delta x) = \Sigma(y\Delta x)$.

For desmere at overbevise mine Læsere herom, vil jeg sætte $\Delta x = 1$, saa bliver $N^\circ = \frac{\overline{x-n+1}\;\overline{x-n+2}\;.\;.\;.\;x}{1.\quad 2\;.\;.\;.\;n} = {}^{x}\mathfrak{N}$, og efter den Hindenburgske bequemme Betegnelsesmaade fremdeles $N' = {}^{x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}$, $N'' = {}^{x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}$, o. s. v. Substitueres disse Værdier, da erholdes for $\Sigma^n(\Delta^{n-1}y\Delta x)$ fölgende Udtryk:

$$\Sigma^n(\Delta^{n-1}y) = {}^x\mathfrak{N}\Delta^{n-1}y - {}^{x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.{}^n\mathfrak{A}\Delta^n y + {}^{x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}.{}^{n+1}\mathfrak{B}.\Delta^{n+1}y - {}^{x+3}\overset{+3}{\mathfrak{N}}.{}^{n+2}\mathfrak{C}.\Delta^{n+2}y + \ldots\ldots$$

og altsaa, naar $n=1$,

$$\Sigma(y) = xy - \frac{x(x+1)}{1.\ 2}\Delta y + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3.}.\Delta^2 y - \ldots\ldots$$

fordi her ${}^n\mathfrak{A} = {}^{n+1}\mathfrak{B} = {}^{x+2}\mathfrak{C}$ etc. $= 1$.

Man sætte nu f. Ex. $y = x^4$, saa er

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \Delta .x^4 = 4x^3+6x^2+4x+1\\
\Delta^2 y &= \Delta^2.x^4 = 12x^2+24x+14\\
\Delta^3.y &= \Delta^3\ x^4 = 24x+36\\
\Delta^4.y &= \Delta^4.x^4 = 24
\end{aligned}$$

Fölgelig $\Sigma(y)$ (eller den Störrelse, hvis endelige Differents er $= x^4$, naar $x+1$ sættes istædet for x) $=$

$$x^5 - \frac{x.\overline{x+1}}{1.\ 2}.[4x^3+6x^2+4x+1] + \frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.\ 2.\ 3}.[12x^2+24x+14]$$
$$- \frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}.\overline{x+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.[24x+36] + \frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}.\overline{x+3}.\overline{x+4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.24$$

Sættes fremdeles $n = 5$, saa bliver $\Delta^{n-1}y = \Delta^4 y = 24$; de övrige Differentser forsvinde. Altsaa faaes

$$\Sigma^5(\Delta^4 y) = \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}.\overline{x-3}.\overline{x-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.24 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5}$$

Men denne Störrelse kan aabenbart ikke være enten den samme som $\Sigma(y)$, eller differere fra samme $\Sigma(y)$ saaledes, at Forskjellen er bestandig; thi $\Sigma^5(\Delta^4 y)$ forsvinder naar

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

Til disse Værdier svarer derimod $\Sigma(y) = 0,\ 0,\ 1,\ 17,\ 98, \ldots\ldots$

Sættes $x = 5$, f. Ex. bliver $\Sigma^5(\Delta^4 y) = 24$, og for $x = 6$, har man 144, Forskjellen er $144 - 24 = 120$ altsaa ikke

$5^4 = 625$; fölgelig ej heller $\Sigma^5(\Delta^4 y) = \Sigma^1(y)$. Sættes $\Delta^4 y = 24 = p$, bliver $\Sigma^1(\Delta^4 y) = \Sigma p = \Sigma 24 = 24\,x = q$ $\Sigma^2(\Delta^4 y) = \Sigma(q) = 24\ \Sigma(x) = 24.\ \frac{x.\overline{x-1}}{1.\ 2} = r$, $\Sigma^3(\Delta^4 y) = \Sigma(r) = \frac{x\ \overline{x-1}.\overline{x-2}}{1.\ 2\ .\ 3}.\ 24 = s$ og altsaa $\Sigma^4(\Delta^4 y) = \frac{24x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4} = x(x-1)(x-2)(x-3)$, hvoraf tydelig sees at $\Sigma^4(\Delta^4 y)$ ej er $= y$.

Dette kunde man allerede have sluttet af de forhen for $\Sigma^0(x)$, $\Sigma'(x)$, $\Sigma^2(x)$, etc. givne Udtryk; men jeg troede tillige, at det ikke var af Vejen at vise det for $\Sigma^n(\Delta^{n-m} y)$ i et enkelt Exempel.

Foruden denne maa jeg endnu beröre en anden Anledning til Vildfarelse. Da vi have fundet

$$\Sigma(y) = xy - \frac{x.\overline{x+1}}{1.\ 2}\Delta y + \frac{x\ \overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.\ 2\ .\ 3}.\ \Delta^2 y - \frac{x\ \overline{x+1}.\overline{x+2}\ \overline{x+3}}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}.\ \Delta^3 y + \ldots$$

og Begreberne *Integration* og *Summation* ere hinanden saa nær beslægtede, kunde man let falde paa at ansee $\Sigma(y)$ for Summen af x Led af en Række hvis almindelige Led er y, og det saa meget des lettere, da man for $y = a$ finder $\Delta y = \Delta^2 y$ etc. $= 0$; altsaa

$$\Sigma(a) = x.\ a;$$

Derimod er for $y = x$, $\Delta y = 1$, $\Delta^2 y = \Delta^3 y = \ldots = 0$; altsaa

$$\Sigma(x) = x^2 - \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{x(x-1)}{1,\ 2}.$$

da derimod

$$S(x) = \frac{x.\overline{x+1}}{1.\ 2}.$$

Paa samme Maade findes

$$\Sigma(x^2) = x^3 - \frac{x.\overline{x+1}}{1.\ 2}.(2x+1) + \frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.\ 2.\ 3}.\ 2$$

$$= x^3 - \frac{x.\overline{x+1}}{1.\ 2.\ 3}.[6x+3-2x-4]$$

$$= x^3 - \frac{x.\overline{x+1}.\overline{4x-1}}{6} = \frac{x}{6}[6x^2 - (4x^2+3x-1)] = \frac{x(2x^2-3x+1)}{1.\ 2.\ 3}$$

eller $\Sigma(x^2) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{1.\ 2.\ 3}$, da derimod

$$S(x^2) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1.\ 2.\ 3}.$$

For at indsee denne Forskjel imellem *Integral* og *Summe* des tydeligere, erindre man sig, at

$Sy + y' = (Sy)'$ eller $\triangle.Sy = y'$, fölgelig omvendt $Sy = \Sigma(y')$. Men y' fremkommer af y naar $x+1$ sættes istædet for x. Paa samme Maade erholdes $\Sigma(y')$ af $\Sigma(y)$. For at gjöre dette paa en let Maade betænke man, at $\Sigma(y') = \Sigma y + \triangle.\ \Sigma y = \Sigma y + y$, hvoraf uden Möje findes

$$Sy = (x+1)\,y - \frac{x(x+1)}{1.\ 2}.\triangle y + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}.\triangle^2 y - \ldots.$$

en Summationsformel, som giver det Forlangte ved Hjelp af endelige Differentser og som kun i det förste Led er forskjellig fra den forhen angivne Integralformel.

Paa samme Maade findes end videre af

$$Sy' = Sy + y'$$
$$SSy' = SSy + Sy'$$

altsaa $\triangle.\ SSy = S.\ y'$ og $SSy = S^2 y = \Sigma(Sy')$

Men $\quad Sy = \Sigma . y'$ altsaa $Sy' = \Sigma . y''$, fölgelig

$$SSy = \Sigma(\Sigma y'') = \Sigma^2(y'')$$

Fremdeles $\quad S^3y' = S^3y + S^2y'$, altsaa

$$\Delta . S^3y = S^2y' = \Sigma^2(y''')$$

fölgelig $\quad S^3y = \Sigma . S^2y' = \Sigma^3(y''')$

og i Almindelighed $S^n(y) = \Sigma^n(y^{(n)})$.

Deraf flyder fölgende vigtige Sætning:

Integrationen af n^{te} Orden giver, naar efter Operationen $x+n$ sættes istædet for x, samme Resultat, som Summationen af samme Orden.

Tillige giver det foregaaende, at

$$S^n(y) = {}^{n+1}\mathfrak{N}y^{(n)} - {}^{n+1+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . {}^{n}\mathfrak{A} . (\Delta y)^{(n)} + {}^{n+1+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}} . {}^{n+1}\mathfrak{B} . (\Delta^2 y)^n - \ldots .$$

hvor $(\Delta^m y)^n$ forestiller den Værdie som $\Delta^m y$ faaer, naar $x+n$ sættes istædet for x.

Exempel. Er $y = x^2$ og $n = 3$, saa er $y^{(n)} = (x+3)^2 = x^2+6x+9$, $(\Delta y)^{(n)} = 2x+1+6 = 2x+7 = (x+4)^2 - (x+3)^2$, og $(\Delta^2 y)^{(n)} = 2$, altsaa

$$S^3(x^2) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(x+3)^2 - 3 . \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}(2x+7) + 6 . \frac{(x+1) \ldots (x+5)}{1 \ldots\ldots 5} . 2$$

$$= \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} . \left[(x+3)^2 - \frac{3(x+4)(2x+7)}{4} + \frac{3}{5}(x+4)(x+5)\right]$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} . \left[(x+3)^2 - 3(x+4)\left[\frac{6x+15}{20}\right]\right]$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left[\frac{20x^2+120x+180-18x^2-117x-180}{4\cdot 5}\right]$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(2x^2+3x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(2x+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

Sættes $x = 5$ erholdes $S^3(x^2) = \frac{5.6.7.8.13}{1.2.3.4.5} = 14.13 = 182$. Virkelig er Rækken af

$$\left.\begin{array}{rl} x^2 = & 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \text{etc.} \\ \text{eller} & 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \text{etc.} \\ \text{altsaa } S^1(x^2) = & 1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ \text{etc.} \\ \text{og } S^2(x^2) = & 1,\ 6,\ 20,\ 50,\ 105,\ \text{etc.} \\ \text{fölgelig } S^3(x^2) = & 1,\ 7,\ 27,\ 77,\ 182,\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

I Almindelighed er $S^n(x^2) = \frac{2x+n}{n+2}\cdot {}^{n+x}\overset{+1}{\mathfrak{N}}$. En for sin Simplicitet mærkværdig Formel.

Forlanges $S^n(y)$ for geometriske Rækker, sætte man $y = a^x$, saa bliver $\Delta y = a^{x+1} - a^x = (a-1)\,a^x$, $\Delta^2 y = (a-1)^2 a^x$, o. s. fr. altsaa

$$S^n(a^x) = {}^{n+x}\mathfrak{N}a^{x+n} - {}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}\cdot{}^{n}\mathfrak{A}(a-1)a^{x+n} + {}^{n+x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}\cdot{}^{n+1}\mathfrak{B}(a-1)^2a^{x+n} \div \text{etc.}$$

Er ${}^{m}\mathfrak{P} = \frac{m.\overline{m-1}\ \ldots\ \overline{m-p+1}}{1.\ 2\ \ldots\ p}$, bliver ${}^{m+1}\overset{+1}{\mathfrak{P}} =$

$$\frac{\overline{m+1}.m.\overline{m-1}\ \ldots\ \overline{m-p+1}}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \overline{p+1}},$$

altsaa ${}^{m+1}\mathfrak{P} = \frac{m+1}{p+1}\cdot{}^{m}\mathfrak{P}$. Deraf fölger:

$$S^n(a^x) = {}^{n+x}\mathfrak{N}a^{x+n}\Big[1 - \frac{n+x+1}{n+1}\cdot{}^{n}\mathfrak{A}(a-1)$$

$$+ \frac{(n+x+1)(n+x+2)}{(n+1)\,.\,(n+2)}\cdot{}^{n+1}\mathfrak{B}(a-1)^2$$

$$- \frac{(n+x+1)(n+x+2)(n+x+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot{}^{n+2}\mathfrak{C}(a-1)^3 + \text{etc.}\Big]$$

Man sætte f. Ex. $a = 2$, $n = 4$ og $x = 5$, saa er

$$S^4(2^x) = {}^9\mathfrak{D}.2^9.\left[1 - \frac{10}{5}.4 + \frac{10.11}{5.6}.10 - \frac{10.11.12}{5.6.7}.20 + \ldots\right]$$

Men da Differentserne $(\Delta y)^{(n)}$, $(\Delta^2 y)^{(n)}$, etc. ej forsvinde, bliver Rækken divergent, især naar $a > 2$, og altsaa ikke brugbar. Derimod udledes, ved directe Methoder, som jeg i et andet Selskabet meddeelt Skrift har forklaret,

$$S^{n+1}(ba^{x-1}) = b\left[a^{n+x} - (n+1).{}^{n+x+1}\mathfrak{N}\left(\frac{a^n}{x} - \frac{{}^n\mathfrak{A}a^{n-1}}{x+1} + \frac{{}^n\mathfrak{B}a^{n-2}}{x+2} - \frac{{}^n\mathfrak{C}a^{n-3}}{x+3} + \ldots\ldots \pm \frac{1}{n+x}\right)\right] : (a-1)^{n+1}$$

Sættes her, som för, $a = 2 = b$, $n = 4$ og $x = 5$, bliver

$$S^5(2^x) = 2\left[a^9 - 5.{}^9\mathfrak{C}\left[\frac{16}{5} - \frac{4.8}{6} + \frac{6.4}{7} - \frac{4.2}{8} + \frac{1.1}{9}\right]\right] : 1^6$$

Men ${}^9\mathfrak{C} = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}$, altsaa $5.{}^9\mathfrak{C} = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4} = 630$ og $a^9 = 512$; fölgelig

$$S^5(2^x) = \left(512 - \frac{16.630}{5} + \frac{32.630}{6} - \frac{24.630}{7} + 630 - \frac{630}{9}\right).2$$
$$= (512 - 2016 + 3360 - 2160 + 630 - 70).2$$
$$= (4502 - 4246).2 = 2.256 = 512$$

Men $2^x = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots\ldots$

altsaa $S^1(2^x) = 2,\ 6,\ 14,\ 30,\ 62,\ \ldots\ldots$

$S^2(2^x) = 2,\ 8,\ 22,\ 52,\ 114,\ \ldots\ldots$

$S^3(2^x) = 2,\ 10,\ 32,\ 84,\ 198,\ \ldots\ldots$

$S^4(2^x) = 2,\ 12,\ 44,\ 128,\ 326,\ \ldots\ldots$

$S^5(2^x) = 2,\ 14,\ 58,\ 186,\ 512,\ \ldots\ldots$

Ved denne Formel, eller ved den deraf fölgende:

$$S^n(ba^{x-1}) = b\left[a^{n+x-1} - n.{}^{n+x-1}\mathfrak{N}\left(\frac{a^{n-1}}{x} - \frac{{}^{n-1}\mathfrak{A}a^{n-2}}{x+1}\right.\right.$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n+x-1}\Big)\Big] : (a-1)^n$$

findes altsaa i Almindelighed Resultatet af den n^{te} Summation af en geometrisk Række, hvis Exponent er a. Er $a = 1$, forholde de tvende Arter af Formeler, som her gives, sig meget forskjellige; thi da Nævneren i Udtrykket for $S^{n+1}(ba^x - 1)$ forsvinder, og Summen dog er endelig, saa længe x er endelig, maae Tælleren ogsaa forsvinde, hvoraf efter behörig Reduction findes:

$$\frac{1}{{}^{n+x}\mathfrak{N}} = \frac{1.{}^n\mathfrak{A}}{x+1} - \frac{2.{}^n\mathfrak{B}}{x+2} + \frac{3.{}^n\mathfrak{C}}{x+3} - \ldots + \frac{n}{n+x}$$

$$= \frac{1.2.3.4 \ldots n}{(n+x)(n+x-1)(n+x-2)\ldots(x+1)} \; {}^{*)}$$

hvoraf fölger at Bröken $\frac{1}{(n+x)(n+x-1)\ldots\ldots(x+1)}$ kan opløses i fölgende:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)(x+1)} - 1.\frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)(x+2)}$$

$$+ \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3\ldots(n-3)(x+3)} - \frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{1.2.3\ldots(n-4)(x+4)} + - \text{etc.}$$

eller, om x sættes $= y - 1$, $n = m + 1$, at $\frac{1}{(m+y)(m+y-1)\ldots y} =$

$$\frac{1}{1.2.3.4\ldots m.y} - 1.\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)(y+1)}$$

$$+ \frac{1}{1.2}.\frac{1}{1.2.3\ldots(m-2)(y+2)} - \frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{1.2.3\ldots(m-3)(y+3)}, \text{ o. s. fr.}$$

indtil $\pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m+1)}.\frac{m+1}{y+m}$

eller $\pm \frac{1}{1.2.3\ldots m.(y+m)}$

*) K. V. S. Skr. 1801-2, 2det Bind Pag. 145.

Da denne Discerption er almeenrigtig, kan man antage $y = \frac{p}{q}$, og da bliver:

$$\frac{1}{p(p+q)(p+2q)\ldots(p+mq)} = \frac{1}{q^m}\cdot\left[\frac{1}{Mp} - 1\cdot\frac{1}{\overset{-1}{M}.(p+q)} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{\overset{-2}{M}.(p+2q)} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{\overset{-3}{M}.(p+3q)} + \ldots\right],$$

naar $\overset{-r}{M} = 1.2.3\ldots\ldots(m-r)$, altsaa $M = 1.2.3\ldots\ldots(m-1)\,m$; derimod maae $\overset{-m}{M}$ tages $= 1$.

Derimod giver den fra Integralformelen hidledede Værdie, for $a = 1$,

$$S^n(ba^x) = S^n(b) = b.\,{}^{n+x}\mathfrak{N} = \frac{(n+x)(n+x-1)(n+x-2)\ldots\ldots}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots}\cdot\frac{(x+2)(x+1)}{(n+1)(n)}.\,b$$

da dog $S^n(b) = b.\,N^o = b.\,\frac{(x-n+1)(x-n+2)\ldots\ldots(x)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots n} = b.\,{}^x\mathfrak{N}.$

Her er altsaa atter en tilsyneladende Anomalie, hvis Oprindelse bör söges deri, at $a = 1$ giver $y = \text{Const.}$ $y^{(n)}$ har altsaa ingen Betydning; fölgelig ikke heller det förste Led ${}^{n+x}\mathfrak{N}y^{(n)}$ i den almindelige Formel:

$$S^{(n)}(y) = {}^{n+x}\mathfrak{N}y^{(n)} - {}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.\,{}^n\mathfrak{A}.(\Delta y)^n + {}^{n+x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}.\,{}^{n+1}\mathfrak{B}.(\Delta^2 y)^n - \text{etc.}$$

Man seer heraf, hvor velgrundet Hr. Prof. Pfaff's Erindring er:

Auf dergleichen Bemerkungen, welche Rechenschaft geben von der Einschränkung gewisser allgemeiner Sätze, ist man, wie es mir vorkommt, in der Lehre von den Reihen, nicht im-

mer gehörig aufmerksam gewesen. (*Versuch einer neuen Summat. Meth. etc. pag.* 22. *Not.*)

Den stadfæstes end ydermere ved fölgende Exempel:

Lad os antage $y = \frac{1}{(x+1)x}$, saa er $y' = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$, $\triangle y = \frac{1}{x+1}$. $\left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right] = -\frac{2}{x(x+1)(x+2)}$, $\triangle^2 y = -\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ $+\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = +\frac{2\cdot 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, o. s. v. og söge Sy efter den derfor givne Formel, saa bliver

$$S.\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \ldots\ldots = v$$

hvortil maatte föjes en Constant. Den være $= A$

Er $Sz = \frac{1}{x}$, bliver $Sz' = \frac{1}{x+1}$, altsaa $Sz' - Sz = z' = \frac{1}{x+1}$ $- \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$, altsaa $z = \frac{-1}{x(x-1)}$; deraf sluttes omvendt

$$S.\frac{1}{x(x+1)} = \text{Const.} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Da nu $v = 0$ naar $x = \infty$, blev $A = 1 = \frac{x}{x+1}$. Deraf skulde fölge:

$$S.\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots \text{ in inf. altsaa}$$

$$0 = \frac{x}{x+1} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots \text{ in inf., en}$$

Lighed, som ikkun gjelder for $x = \infty$. Denne Urigtighed ligger allerede i Udtrykket:

$$S.\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots = v$$

ifölge hvilket v skulde tage af, naar x tager til, hvilket er en aabenbar Urimelighed, da alle Summer ved Rækker, hvis Led alle ere positive, nödvendigen voxe med Ledenes Mængde, som x forestiller. En saadan Anomalie skulde ikke mindre vise sig, naar man vilde oplöse Udtryk af denne Form:

$$y = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(x+k)}$$

i en uendelig Række; thi da denne kan erholde en dobbelt Form:

$$1)\ y = \frac{1}{x^m} - \frac{\alpha}{x^{m+1}} + \frac{\beta}{x^{m+2}} - \frac{\gamma}{x^{m+3}} + \ldots\ldots \text{ eller og}$$

$$2)\ y = \frac{1}{A} - \frac{x}{B} + \frac{x^2}{C} - \frac{x^3}{D} + \ldots\ldots$$

saa erholdes for Sy, i Tilfældet $x = \infty$, tvende forskjellige Værdier, hvoraf den ene er uendelig stor, den anden meget liden, naar m er et stort Tal, ikke at tale om, at den förste Oplösning, for $x = 0$, giver $y = \infty^m$, da den dog burde give $y = 1 : abc \ldots k$.

Dette maae være nok til at vise, hvor uundværlig Forsigtighed er ved Anvendelsen af saa almindelige Formeler. Men da nogle af mine Læsere herved kunne foranlediges til at omtvivle Nytten af det i Begyndelsen anförte Lagrangiske Princip, *at negativ Differentiation er Integration af samme Grad*, maaskee endog sammes Rigtighed, tillade man mig endnu at vise, hvorledes samme, endog i vanskelige Tilfælde, heldigen förer til Oplösningen, uden at man altid behöver at tage sin Tilflugt til uendelige Rækker, hvortil nemlig altid den af mig givne Formel förer, naar Differentserne $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... ej tilsidst forsvinde. Til Exempel vælger jeg det af de störste Analysens Mestere bearbejdede Problem, hvor der spörges om Spillernes Forventning i det saakaldte *à croix ou pile*, eller *Raflen*, hvilket jeg i Almindelighed fremsætter saaledes:

A rafler med B paa fölgende Vilkaar: A betinger sig et vist Antal af Kast. x betyde et vists Kasts Orden og Ψx enhver

Function af x. Kaster A ved samme saaledes, at Myntens rette Side falder opad, betaler B ham for samme den Summe Ψx. Sp. Hvormeget bör A betale forud til B, naar begges rimelige Forventninger skulle være lige, eller naar B med Billighed skal kunne indgaae disse Vilkaar?

Oplösning. 1) Det Sögte være φx hvor φx ligeledes forestiller en Function af x.

2) Der gives kun tvende Tilfælde, nemlig det, hvor den rette, og det hvor den vrange Side, efter Faldet vender opad, altsaa er Muligheden at vinde 1 Kast $= \frac{1}{2}$, Rimeligheden at vinde 2 $= \frac{1}{4}$, og den at vinde x Kast $= \frac{1}{2^x}$.

3) Sæt nu at A allerede havde betalt B forud for x Kast, og önskede endnu at forsöge eet, saa blev Rimeligheden ogsaa at vinde dette, $= \frac{1}{2^{x+1}}$. Han kunde altsaa ikke betale mere til B end den $\frac{1}{2^{x+1}}$te Deel af hvad han selv faaer, altsaa ikkun $\frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}$.

4) Dette tilföjet det tilforn betalte giver $\varphi x + \frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}$

5) Altsaa er $\varphi(x+1) = \varphi x + \frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}$

6) Fölgelig $\varphi(x+1) - \varphi x = \Delta . \varphi x = \frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}$

7) Man har altsaa $\varphi x = \Sigma . \frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}} + \text{Const.}$

8) Denne Ligning kunde integreres efter Formelen $\Sigma(y)$, hvor y maa tages $= \frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}$. Men Differentserne $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ . . . ville ikke forsvinde. Lad os derfor fölge det Lagrangiske Princips Vejledning og differentiere, saa erholde vi:

$$\Delta y \text{ (naar } y = \frac{\Psi x}{2^x}) = - \frac{\Psi x - \Delta \Psi x}{2^{x+1}}$$

$$\Delta^2 y = + \frac{\Psi x - 2\Delta\Psi x + \Delta^2 \Psi x}{2^{x+4}},$$

$$\Delta^3 y = - \frac{\Psi x - 3\Delta\Psi x + 3\Delta^2\Psi x - \Delta^3 \Psi x}{2^{x+3}}$$

altsaa $\Delta^m\left(\frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}\right) =$

$$\frac{+\Psi(x+1) - {}^m\mathfrak{A}\Delta\Psi(x+1) + {}^m\mathfrak{B}\Delta^2\Psi(x+1) - {}^m\mathfrak{C}\Delta^3\Psi(x+1). +}{2^{x+m+1}}$$

i Almindelighed.

Nu er $\Sigma^m\left(\frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}\right) = \Delta^{-m}\left(\frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}\right)$, og naar $m = -1$, bliver ${}^m\mathfrak{A} = -1$, ${}^m\mathfrak{B} = +1$, ${}^m\mathfrak{C} = -1$, ${}^m\mathfrak{D} = +1$, etc.

9) Fölgelig er $\Sigma\left(\frac{\Psi(x+1)}{2^{x+1}}\right) =$

$$- \frac{\Psi(x+1) + \Delta\Psi(x+1) + \Delta^2\Psi(x+1) + \dots}{2^{x+m+1}}$$

eller $\varphi x = - \frac{\Psi(x+1) + \Delta\Psi(x+1) + \Delta^2\Psi(x+1) + \dots \text{ etc.}}{2^x}$

d. e. $\varphi x = C - \frac{S.\Delta^n\Psi(x+1)}{2^x}$, naar Tegnet S blot henföres til den foranderlige Störrelse n.

Saa ofte altsaa $S.\Delta^n\psi(x+1)$ kan udtrykkes bestemt og ved en Formel, som ei löber ud i en uendelig Række, lader ogsaa ϕx sig fremstille i endelige Udtryk.

Det vil ikke være overflödigt at vise Anvendelsen og Rigtigheden af denne Oplösningsmethode i fölgende Exempler:

Ex. 1. Sættes $\psi x = mx$, da bliver $\psi(x+1) = mx+m$, naar m er en bestandig Störrelse. Deraf erholdes:

$$\Delta\psi(x+1) = m\Delta x = m;\ \Delta^2\psi(x+1) = 0,\ \Delta^3\psi(x+1) = 0, \text{ o. s. fr.}$$

Fölgelig $\phi x = C - \frac{\overline{mx+m}+m}{2^x} = C - m.\frac{x+2}{2^x}$.

Naturligt maa ϕx forsvinde, naar $x = 0$; altsaa bliver

$$\phi x = m.\left[2 - \frac{x+2}{2^x}\right]$$

Ex. 2. Antages $\psi x = mx^2$, findes $\Delta\psi x = 2mx+m$, $\Delta^2\psi x = 2m$;

$$\left.\begin{aligned} \text{altsaa } \psi(x+1) &= mx^2+2mx+m \\ \Delta\psi(x+1) &= 2mx+3m \\ \Delta^2\psi(x+1) &= +2m \end{aligned}\right\} \text{altsaa } S.\Delta^n\psi(x+1) = mx^2+4mx+6m$$

og $\phi x = C - \frac{mx^2+4mx+6m}{2^x} = m.\left[6 - \frac{x^2+4x+6}{2^x}\right]$.

Ex. 3. Er $\psi x = c^x$, bliver $\Delta\psi x = (c-1)c^x$, $\Delta^2\psi x = (c-1)^2 c^x$, $\Delta^x\psi x = (c-1)^n . c^x$; altsaa $\Delta^n\psi(x+1) = (c-1)^n . c^{x+1}$.

Deraf fölger $S.\Delta^n\psi(x+1)$, [naar $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$,] $= \frac{c^{x+1}}{1-(c-1)}$

fölgelig $\phi x = C - \frac{c^{x+1}}{(2-c).2^x} = \frac{c}{2-c}.\left[1 - \frac{c^x}{2^x}\right]$.

I det specielle Tilfælde, at $c = 2$, erholdes

$\varphi x = \frac{2}{0}.o$, som ingen bestemt Værdie synes at have;

men sættes $c - 1 = 1 = p$, findes

$\varphi x = \frac{c}{2-c}.\left[1 - \frac{c^x}{2^x}\right]$; eller, da $2 - c = 2.[1 - 1] = 2[1 - p]$,

$\varphi x = \frac{1 - p^x}{1 - p} = 1 + p + p^2 + + p^{x-1} = x$; fordi $p = p^2 = p^3$ $= \ldots = p^{x-1} = 1$.

I övrigt fölger den samme Ligning af den almindelige Oplösnings Differentialligning; thi da

$$\Delta y = \Delta \varphi x = \frac{\psi(x+1)}{2^{x+1}} = \frac{c^{x+1}}{2^{x+1}} = 1 = \Delta x$$

erholdes umiddelbar $y = \varphi x = x + C = x$.

Fremsættes denne Opgave endnu almindeligere saaledes, at det förste Kast giver A en Forventning $= \frac{1}{a}$, altsaa det x^{te} en saadan, der udtrykkes ved $\frac{1}{a^x}$, da om $v = \frac{\psi x}{a^x}$, findes

$$\Delta^m v = \frac{(1-a)^m.\psi x + m\mathfrak{A}(1-a)^{m-1}.\Delta\psi x + m\mathfrak{B}(1-a)^{m-2}.\Delta^2\psi x + \ldots}{a^{x+m}},$$

fölgelig

$$\Delta^m\left(\frac{\psi(x+1)}{a^{x+1}}\right) = \frac{b^m\psi(x+1) + m\mathfrak{A}b^{m-1}\Delta\psi(x+1) + m\mathfrak{B}b^{m-2}\Delta^2\psi(x+1) + \ldots}{a^{x+m+1}}.$$

Sættes nu, som för, $m = -1$, erholdes

$$\Sigma\left(\frac{\psi(x+1)}{a^{x+1}}\right) = \frac{b^m\psi(x+1) - b^{m-1}\Delta\psi(x+1) + b^{m-2}\Delta^2\psi(x+1) - \ldots}{a^{x+m+1}},$$

$$\text{eller } \varphi x = \frac{\psi(x+1) - \frac{1}{b}\Delta\psi(x+1) + \frac{1}{b^2}\Delta^2\psi(x+1) - \ldots}{ba^x} + \text{Const.}$$

b taget $= 1 - a$.

Exempel. A og B indgaae fölgende Betingelser: For hvert x^{te} Kast, hvorved A med tvende Tærninger slaaer Doubletter, faaer han af B, $\frac{x(x+1)}{1.2}$ Skl. Hvormeget bör A give B, for n Kast, förend Spillet begynder, naar Spillet skal kunne kaldes billigt?

Oplösning. Her er $\psi x = \frac{x(x+1)}{1.2}$, altsaa $\psi(x+1) = \frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$, altsaa $\Delta.\psi(x+1) = \frac{(x+2)(x+3) - (x+1)(x+2)}{1.2} = x+2$, $\Delta^2.\psi(x+1) = 1$; de övrige ere $= 0$. Fölgelig bliver

$$\varphi x = \frac{(x+1)(x+2) - \frac{x+2}{1-2} + \frac{1}{(1-a)^2}}{(1-a)a^x} + \text{Const.}$$

Nu er Antallet af Doubletterne, som kunne slaaes i eet Kast med 2 Tærninger, $= 6$; Antallet af de mulige Forbindelser $= 36$, fölgelig Rimeligheden at træffe Doubletter $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; hvoraf sees at $a = 6$. Deraf erholdes

$$\phi x = \text{Const.} - \frac{(x+1)(x+2)+\frac{1}{5}(x+2)+\frac{1}{25}}{5.6^x}$$

$$= \text{Const.} - \frac{25(x+1)(x+2)+5(x+2)+1}{125.6^x}$$

$$= \text{Const.} - \frac{25x^2+80x+61}{125.6^x}$$

For $x=1$ bliver $\psi x = 1$, $\phi x = \frac{1}{6}$, altsaa Const. $= \frac{1}{6} + \frac{156}{125.6}$

$= \frac{1}{6} + \frac{26}{125}$, altsaa $\phi x = \frac{1}{6} + \frac{26.6^x - (25x^2+80x+61)}{125.6^x}$.

Tillæg.

A) Da $\Delta.\phi x = \frac{\psi(x+1)}{a^{x+1}} = \left(\frac{\psi x}{a^x}\right)' = v'$, altsaa $\phi x = \Sigma(v')$, og vi forhen have seet at $S(y) = \Sigma(y')$, findes ligeledes $\phi x = S(v)$, eller:

$\phi x = S\left(\frac{\psi x}{a^x}\right)$. Denne Formels Rigtighed indsees lettelig;

thi da Sandsynligheden at A vinder		kan B ei for dette Kast forlange mere end
ved 1ste Kast er	$= \frac{1}{a}$	$\frac{\psi(1)}{a}$
— 2det —	$= \frac{1}{a^2}$	$\frac{\psi(2)}{a^2}$
— 3die —	$= \frac{1}{a^3}$	$\frac{\psi(3)}{a^3}$
o. s. fr. indtil		……
— x^{te} —	$= \frac{1}{a^x}$	$\frac{\psi(x)}{a^x}$

d. e. A kan for x Kast ei tilstaae B mere end Summen

$$\frac{\psi(1)}{a} + \frac{\psi(2)}{a^2} + \frac{\psi(3)}{a^3} + \ldots + \frac{\psi(x)}{a^x} \text{ eller S. } \frac{\psi(x)}{a^x}.$$

For $x = 3$ er f. Ex. $S.\left(\frac{x^2}{2^x}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{8} = 2\frac{5}{8}$.

Det samme findes ved den forhen give Formel:

$$\varphi x = 6 - \frac{x^2 + 4x + 6}{2^x}.$$

Disse Opgaver lade sig altsaa ligeledes oplöse efter den bekjendte Summations-Methode, som *Euler* lærer i sin Diff. Regn. 2den D. 5te Cap. §. 130. Men endnu almindeligere kan Problemet fremsættes saaledes:

Naar B. forpligter sig til at betale A Summerne

$$\overset{1}{p},\ \overset{2}{p},\ \overset{3}{p},\ \overset{4}{p},\ \ldots\ldots\ \overset{x}{p}:$$

for 1ste, 2det, 3die, ... x^{te} Kast, og Sandsynlighederne at vinde disse Kast ere:

$$\overset{1}{y},\ \overset{2}{y},\ \overset{3}{y},\ \overset{4}{y},\ \ldots\ldots\ \overset{x}{y}$$

da at finde hvad A bör betale B forud for x Kast.

For at kunne oplöse denne Opgave, maae vi forudskikke fölgende Sætning:

Naar *M* er Sandsynligheden for Tilfældet A, betragtet uden Forbindelse med andre Tilfælde:

m den isolerede Sandsynlighed af et andet Tilfælde B;

Saa er $M.m. =$ Sandsynligheden af at A og B kunne indtræffe efter hinanden.

Beviis. $\left.\begin{matrix}V\\v\end{matrix}\right]$ være Antallet af de Tilfælde, hvori $\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right]$ have Sted

$\left.\begin{matrix}T\\t\end{matrix}\right]$ Antallet af de for $\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right]$ ugunstige Forbindelser,

saa er $\frac{V}{V+T} = M$ og $\frac{v}{v+t} = m$. Men Antallet af alle ved Successionen $\left.\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right]$ mulige Forbindelser er $(V+T)(v+t)$, da derimod de, ved hvilke den har Sted, ikkun ere $V.\,v$ i Tallet, fordi Successionen ei siges at være indtruffen, med mindre eet af de $\left.\begin{matrix}V\\v\end{matrix}\right]$ Tilfælde forbindes med eet af de $\left.\begin{matrix}v\\V\end{matrix}\right]$, og dette giver $V.\,v$ for $\left.\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right]$ gunstige Forbindelser. Sandsynligheden af denne Succession er altsaa $\frac{Vv}{(V+T)(v+t)} = Mm$.

Ere nu $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}$, $\overset{3}{y}$, . . . saadanne isolerede Sandsynligheder, saa er Sandsynligheden at vinde n successive Kast $=$ $\overset{1}{y}.\overset{2}{y}.\overset{3}{y}\ldots\overset{n}{y}$; thi Sandsynligheden af at vinde tvende, kan igjen ansees som en enkelt. Det samme gjelder om Sandsynligheden af at vinde 3, 4, . . . successive Kast. Det som A bör betale til B bliver altsaa:

$$\varphi x = \overset{1}{p}.\overset{1}{y} + \overset{2}{p}.\overset{1}{y}.\overset{2}{y} + \overset{3}{p}.\overset{1}{y}.\overset{2}{y}.\overset{3}{y} + + + \overset{x}{p}.\overset{1}{y}.\overset{2}{y}.\overset{3}{y}\ldots\overset{x}{y}.$$

en Summa, som i det enkelte Tilfælde, hvor de isolerede Sandsynligheder blive uforandrede, faaer denne Form:

$$\varphi x = \overset{1}{p}.y + \overset{2}{p}.\overset{2}{y} + \overset{3}{p}.\overset{3}{y} + + + \overset{x}{p}.\overset{x}{y}.\qquad \text{H. sk. f.}$$

B) Ved en Vens Haand erholdt jeg, kort för Slutningen af nærværende Afhandling, det af Hr. Prof. *Hindenburg* udgivne Skrift: *Ueber Combinatorische Analysis und Derivations - Calcul. Etor. Leipzig* 1803. 8*vo*, hvori pag. 15, 37 og 145, den af Hr. Prof. *Arbogast* i Strasburg paa en dobbelt Maade udviklede Integralformel $\Sigma^m y(\Delta x)^m)$ omtales. Da jeg ikke har kunnet faae Prof. Arbogast's Skrift over *Derivations - Regningen*, kan jeg ikke anföre hans Formeler. Imidlertid kan Integralet let udledes af den ved mig fremsatte Formel; thi da Δx antages at være en bestandig Störrelse, da, om $y = z(\Delta x)^{p-1}$; altsaa $\Delta^m y = \Delta^m z.(\Delta x)^{p-1}$, erholdes

$$\Sigma^n(z(\Delta x)^p) = N^\circ z(\Delta x)^{p-1} - {}^n\mathfrak{A}N'(\Delta x)^{p-1}\Delta z + {}^{n+1}\mathfrak{B}N''(\Delta x)^{p-1}\Delta^2 z - \ldots$$

en Formel, som endog er almindeligere end den Arbogastiske, og hvis Udvikling neppe er saa vanskelig, som den, der fölger af de Burmannske Formeler (S. anförte Skr. pag. 31-35).

Forlanges f. Ex. $\Sigma^2(x^2\Delta x^3)$, da er $z = x^2$, $\Delta z = 2x\Delta x + \Delta x^2$ og $\Delta^2 z = 2\Delta x^2$. Fremdeles er $n = 2$, altsaa

$$N^\circ = \frac{(x-\Delta x)x}{1.\,2}\cdot\frac{1}{\Delta x},\quad N' = \frac{(x-\Delta x)x(x+\Delta x)}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{1}{\Delta x^2}\ \text{og}$$

$$N'' = \frac{(x-\Delta x)\ldots(x+2\Delta x)}{1\ldots\ldots 4}\cdot\frac{1}{\Delta x^3}.$$ Heraf findes:

$$\Sigma^n(z(\Delta x)^p) = \Sigma^2(x^2\Delta x^3) = \frac{x^3\Delta x(x-\Delta x)}{1.\,2} - 2.\ \frac{(x-\Delta x)x(x+\Delta x)}{1.\,2.\,3}.$$

$$(2x+\Delta x)\Delta x + 3.\ \frac{(x-\Delta x)\ldots(x+2\Delta x)}{1\ldots\ldots 4}.\ 2\Delta x^2 = \frac{x^3\Delta x(x-\Delta x)}{2}$$

$$-(x-\Delta x)x(x+\Delta x)\left[\tfrac{4}{3}x\Delta x+\tfrac{1}{3}\Delta x^2-\tfrac{1}{4}x\Delta x-\tfrac{1}{2}\Delta x^2\right]=\frac{6x^3\Delta x(x-\Delta x)}{12}$$

$$-\frac{x^3-x\Delta x^2}{12}.\quad(5x\Delta x-2\Delta x^2)=\tfrac{1}{12}(x^4\Delta x-4x^3\Delta x^2+5x^2\Delta x^3$$

$$-2x\Delta x^4).$$

For at overbevise sig om det fundne Integrals Rigtighed, behöver man blot at differensere det tvende Gange, og man vil erholde $x^2\Delta x^3$.

C) Da $S^n(y)={}^{n+x}\mathfrak{N}y^{(n)}-{}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}{}^{n}\mathfrak{A}(\Delta y)^n+{}^{n+x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}.\,{}^{n+1}\mathfrak{B}(\Delta^2 y)^n-\ldots$
og, naar $y=x^m$,

$\Delta y={}^m\mathfrak{A}x^{m-1}\Delta x+{}^m\mathfrak{B}x^{m-2}\Delta x^2+{}^m\mathfrak{C}x^{m-3}\Delta x^3+\ldots$

$\Delta^2 y=\qquad 2.\,{}^m\mathfrak{B}x^{m-2}\Delta x^2+6.\,{}^m\mathfrak{C}x^{m-3}\Delta x^3+\ldots$

$\Delta^3 y=\qquad\qquad 6.\,{}^m\mathfrak{C}x^{m-3}\Delta x^3+\ldots$

. . . .

Rækker, hvori de til ${}^m\mathfrak{A}x^{m-1}\Delta x$, ${}^m\mathfrak{B}x^{m-2}\Delta x^2$, ${}^m\mathfrak{C}x^{m-3}\Delta x^3$, &c. svarende Coefficienter ere,

for Δy, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, . . .

— $\Delta^2 y$, 2, 6, 14, 30, 62, 126, 254, . . .

— $\Delta^3 y$, 6, 36, 150, 540, 1806, 5796, ...

— $\Delta^4 y$, 24, 240, 1560, 8400, 40824, ...

— $\Delta^5 y$, 120, 1800, 16800, 126000, ...

— $\Delta^6 y$, 720, 15120, 191520, ...

— $\Delta^7 y$, 5040, 141120, ... o. s. fr.

Men ved Summationer er $\Delta x=1$, altsaa $y^{(n)}=(x+n)^m$,

$$(\Delta y)^{(n)} = \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \overset{4}{V} + \overset{5}{V} + \ldots$$

$$(\Delta^2 y)^n = 2\overset{2}{V} + 6\overset{3}{V} + 14\overset{4}{V} + 30\overset{5}{V} + \ldots$$

$$(\Delta^3 y)^n = 6\overset{3}{V} + 36\overset{4}{V} + 150\overset{5}{V} + \ldots$$

$$(\Delta^4 y)^n = 24\overset{4}{V} + 240\overset{5}{V} + \ldots$$

$$(\Delta^5 y)^n = 120\overset{5}{V} + \ldots$$

Hvor Betydningen af Abbreviaturerne $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$, &c. let forstaaes, f. Ex. $\overset{4}{V} = {}^{m}\mathfrak{D}(x+n)^{m-4}$.

Af disse Værdier uddrages endelig følgende Hovedformel:

$$S^n(x^m) = {}^{n+x}\mathfrak{N}(x+n)^m$$
$$- {}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.\,{}^{n}\mathfrak{A}.\,(\overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \overset{4}{V} + \overset{5}{V} + \ldots)$$
$$+ {}^{n+x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}.\,{}^{n+1}\mathfrak{B}(\;2\overset{2}{V} + 6\overset{3}{V} + 14\overset{4}{V} + 30\overset{5}{V} + \ldots)$$
$$- {}^{n+x+3}\overset{+3}{\mathfrak{N}}.\,{}^{n+2}\mathfrak{C}.\,(\qquad 6\overset{3}{V} + 36\overset{4}{V} + 150\overset{5}{V} + \ldots)\ \text{o. s. v.}$$

Eller:

$$S^n(x^m) = {}^{n+x}\mathfrak{N}(x+n)^m$$
$$- {}^{n}\mathfrak{A}.\,{}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.\,{}^{m}\mathfrak{A}.\,(x+n)^{m-1}$$
$$\div ({}^{n}\mathfrak{A}.\,{}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}} - 2.\,{}^{n+1}\mathfrak{B}.\,{}^{n+x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}}).\,{}^{m}\mathfrak{B}(x+n)^{m-2}$$
$$- ({}^{n}\mathfrak{A}.\,{}^{n+x+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}} - 6.\,{}^{n+1}\mathfrak{B}.\,{}^{n+x+2}\overset{+2}{\mathfrak{N}} + 6.\,{}^{n+2}\mathfrak{C}.\,{}^{n+x+3}\overset{+3}{\mathfrak{N}}).\,{}^{m}\mathfrak{C}(x+n)^{m-3}$$

&c. &c. &c.

en Formel, hvis Progressions Lov dependerer af Coefficienterne 1, 2; 1, 6, 6; 1, 14, 36, 24; 1, 30, 150, 240, 120; 1, 62, 540, 1560, 1800, 720; 1, 126, 1806, 8400, 16800, 15120, 5040; 1, 254, 5796, 40824, 126000, 191520, 141120; o. s. fr.

Disse Coefficienter kunne fortsættes efter Behag. Deres fælleds förste Led er $= 1$; det sidste altid af Formen $1 . 2 . 3 . 4 \ldots p$. I hver Række af de her anförte, giver det $(q - 1)^{te}$ Led $+$ det q^{te} multipliceret med q det q^{te} Led i den folgende Række. Saaledes giver $(1806 + 8400) . 4$ eller 40824 det 4^{de} Led i næste Række.

Betænker man, hvor vidtlöftig Beregningen af de saakaldte *Bernoulliske Tal* er, som udgjöre Coefficienterne i den bekjendte Summations-Formel for x^n, og hvor let det derimod er at fortsætte nærværende Formel, som dog er af et uendelig större Omfang, smigrer Forfatteren sig med, at nærværende Tillæg ei vil være den analytiske Videnskabs Elskere og Kjendere uvelkommen. Deres Bifald vil være ham en Opmuntring til större og vanskeligere Undersögelser.

Fölgende Trykfeil ombedes Læseren at undskylde og rette.

Side	*Linie*	*istædenfor*	*læs*
81	2 (nedenfra)	Δx	Δx
—	1 (nedenfra)	${}^{n}\Delta x$	$n\Delta x$
82	1 (nedenfra)	tvende	trende
83	9	${}^{m}\mathfrak{C}\Delta x$	${}^{m}\mathfrak{C}\Delta^{3} x$
88	12	$\mathfrak{A}M'\Delta^{m+1}y$	${}^{m}\mathfrak{A}M'\Delta^{m+1}y$
90	2	$q\Sigma^{2}(\Delta^{4}y)$	$q,\ \Sigma^{2}(\Delta^{4}y)$
92	2 (nedenfra)	$\frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.\ 2.\ 3}$	$\frac{\overline{x+1}.\overline{x+2}.\overline{x+3}}{1.\ 2.\ 3}$
—	4 (nedenfra)	${}^{m+1}\mathfrak{P}$	${}^{m+1}\overset{+1}{\mathfrak{P}}$
103	5 (nedenfra) (i Tælleren)	$1-2$	$1-a$

Side 82, Linie 8, bör Formelen være:

$$d^{m}(xy) = x^{m}y^{0} + \frac{m}{1}x^{m-1}y^{1} + \frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2}x^{m-2}y^{2} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}y^{3}$$

Pagina 91 i den 12te Linie, er i nogle Exemplarer Mærket ved y i Integralet $\Sigma(y)$ bortfalden.

Pagina 94 bör overalt fra Linie 10 (inclusive) istæden for 2^{x} læses $2.\ 2^{x}$.

Nogle mindre vildende Trykfeil vil Læseren let selv bemærke.